<u>Løsning av lineære ligninger ved bruk av Gauss´ eliminasjonsmetode (Numerical Receipes, chapter 2)</u>

Et sett av lineære, algebraiske ligninger kan skrives som:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1N}\,x_N &= d_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2N}\,x_N &= d_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3N}\,x_N &= d_3 \\
&\ldots \\
a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + a_{M3}x_3 + \ldots + a_{MN}\,x_N &= d_M
\end{aligned}
$$

Vi har her N ukjente ($x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N$), som er beslektet gjennom M ligninger. Koeffisientene i ligningenes venstre side (a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, M;\ j = 1, 2, \ldots, N$) er alle kjente tall, i likhet med koeffisientene på høyre siden (b_i, $i = 1, 2, \ldots, M$). Ligningene ovenfor kan også skrives som:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

hvor **A** er koeffisientmatrisen, og **b** er høyre-side vektor,

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ & \ldots & & \\ a_{M1} & a_{M2} & \ldots & a_{MN} \end{bmatrix} \quad
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_M \end{bmatrix} \quad
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_M \end{bmatrix}
$$

La oss benytte følgende sett av 3 ligninger med 3 ukjente for å illustrere metoden:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2 \qquad (2)$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3 \qquad (3)$$

Gauss-metoden begynner med å multiplisere ligning (1) med $-a_{21} / a_{11}$ for deretter å addere den til ligning (2). Den nye ligning (2) blir da:

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = d'_2$$

Multipliser så ligning (1) med $-a_{31} / a_{11}$ og addere den til ligning (3), slik at den nye ligning (3) blir:

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = d'_3$$

Ligningssettet er nå endret til:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \qquad (4)$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = d'_2 \qquad (5)$$
$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = d'_3 \qquad (6)$$

Vi multipliserer så ligning (5) med $-a'_{32} / a'_{22}$ og adderer den til ligning (6), slik at ligningssettet blir:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1 \qquad (7)$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = d'_2 \qquad (8)$$
$$a''_{33}x_3 = d''_3 \qquad (9)$$

Denne endringen av ligningssettet kalles *forover eliminasjon*. Ligning (9) kan nå løses direkte for x_3:

$$x_3 = d''_3 / a''_{33} \qquad (10)$$

Etter å ha gjennomført forover-elimineringen og løst for siste ukjente i vektorrekken (x_3), skal vi foreta en *bakover innsetting*. Dette betyr ganske enkelt at etterhvert som de ukjente beregnes, fra x_3 og nedover, substitueres de inn i ligningene ovenfor, og den neste ukjente i rekken kan beregnes. For ligningene (8) og (7) ovenfor gjøres dette som følger:

$$x_2 = (d_2' - a_{23}' x_3) / a_{22}' \tag{11}$$

$$x_1 = (d_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3) / a_{11} \tag{12}$$

Vi kan nå skrive et generelt formelverk, basert på eksemplet ovenfor, for å løse et sett av *nxn* lineære ligninger:

1) Forover eliminering:

$$a_{i,j} = a_{i,j} + a_{k,j}(-a_{i,k} / a_{k,k}), \quad ((j = k+1, n), i = k+1, n), k = 1, n-1$$

$$d_i = d_i + d_k(-a_{i,k} / a_{k,k}), \quad (i = k+1, n), k = 1, n-1$$

2) *Bakover innsetting:*

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}} \left(d_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j \right), \quad i = n, ..., 1$$

Oppgave

1. Skriv et FORTRAN-program som består av et hovedprogram (MAIN PROGRAM) som leser data (n, $a_{1,1} - a_{n,n}$, $d_1 - d_n$) og skriver resultater ($x_1 - x_n$), og en subrutine (SUBROUTINE GAUSS(X,A,D,N)) som benytter Gauss´ elimineringsmetode for å løse et sett av n ligninger og returnerer n verdier av x til hovedprogrammet.
2. Test programmet på ligningssettet:

$$\begin{array}{rrrrrl}
2x & +3y & +4z & -5s & +7t & = -35 \\
8x & -2y & -3z & +9s & +3t & = +53 \\
 & 4y & +6z & -3s & -2t & = -33 \\
5x & -7y & +8z & +3s & -9t & = -19 \\
3x & +5y & -2z & +4s & +6t & = +27
\end{array}$$

3. Finn en subrutine i NAG-biblioteket på petraserveren (bruk **naghelp**) som utfører en tilsvarende ligningsløsning (Gauss eller en annen metode). Modifiser programmet ditt slik at det spør på skjermen om det skal benytte din egen Gauss-rutine eller NAG-rutinen for å løse ligningssettet. Sjekk at svarene fra de to metodene er identiske. (NB! Deklarér alle flyttall som **REAL*8** (dobbel presisjon) fordi NAG-rutinene krever dette)

   NAG-rutinen linkes inn ved **xlf –o prog fil.f –l nag**