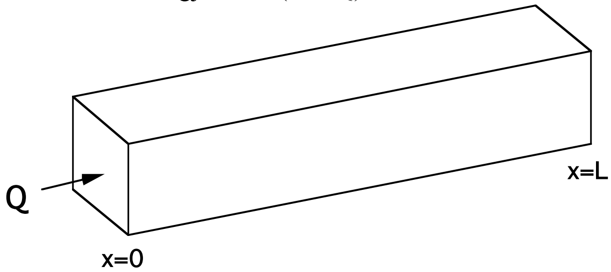
Numerisk løsning av diffusivitetsligningen

I øving 6 ble det laget et program for å beregne analytisk trykkfordeling i en porøs stang. Skissen nedenfor viser den porøse stangen, hvor et fluid strømmer igjennom (rate Q).



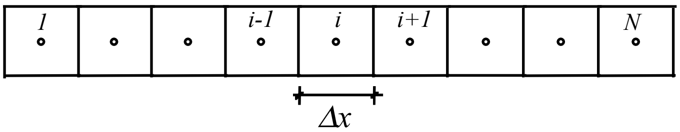
Diffusivitetsligningen for én-dimensjonal strømning av én væske i et slikt horisontalt porøst medium, kan skrives som

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = (\frac{\phi\mu c}{k})\frac{\partial P}{\partial t} \tag{1}$$

hvor det er antatt konstant porøsitet (ϕ), viskositet (μ), permeabilitet (k) og kompressibilitet (c).

I denne øvingen skal dere lage et program for **numerisk** løsning av ligning (1) ved å benytte standard endelig differanse-tilnærminger for to derivert-leddene $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ og $\frac{\partial P}{\partial t}$. Dette krever at den porøse stangen over deles inn i et antall grid-blokker (diskretiseres), og at ligningen løses for trykk i hver enkelt blokk.

Differanseløsning krever at vi deler stangen inn i et griddblokksystem, som skissert under:



For hver av disse griddblokkene kan differansetilnærmingene for de to derivert-leddene skrives som

$$(\frac{\partial P}{\partial t})_i \approx \frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t} \tag{2}$$

og

$$(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2})_i \approx \frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{\Delta x^2} \tag{3}$$

Den generelle numeriske formen av ligning (1) for griddblokk i blir dermed

$$\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{\Delta x^2} = (\frac{\phi\mu c}{k})\frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t} \tag{4}$$

Endeblokkene, dvs. blokkene *1* og *N*, må behandles spesielt siden blokkene *i-1* og *N+1*, respektivt, ikke eksisterer. Dersom trykkene på endeflatene er konstante, vil tilnærmingene (3) og (4) måtte modifiseres litt for blokkene *1* og *N*. Den numeriske formen av ligning (1) blir dermed:

$$\frac{P_2^t - 3P_1^t + 2P_L^t}{\frac{3}{4}\Delta x^2} = (\frac{\phi\mu c}{k})\frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t},\ i = 1 \tag{5}$$

$$\frac{P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t}{\Delta x^2} = (\frac{\phi\mu c}{k})\frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t},\ i = 2,\ldots,N-1 \tag{6}$$

$$\frac{2P_R^t - 3P_N^t + P_{N-1}^t}{\frac{3}{4}\Delta x^2} = (\frac{\phi\mu c}{k})\frac{P_i^{t+\Delta t} - P_i^t}{\Delta t}, i = N \tag{7}$$

Initialbetingelsen (opprinnelige trykk)

$$P_i^{t=0} = P_0, i = 1,\ldots,N \tag{8}$$

og randtrykkene er

$$P_{i=1/2}^{t>0} = P_L \tag{9}$$

$$P_{N+1/2}^{t>0} = P_R \tag{10}$$

Disse randtrykkene påføres øyeblikkelig etter $t=0$, slik at endetrykkene i praksis også blir initialtrykk.

Ligningene (5)-(7) kan løses eksplisitt for gjennomsnitts-trykk i blokkene $(i=1,...,N)$ for hvert tidsskritt, i henhold til formlene nedenfor

$$P_1^{t+\Delta t} = P_1^t + (\frac{\Delta t}{\Delta x^2})(\frac{k}{\phi\mu c})(P_2^t - 3P_1^t + 2P_L) \tag{11}$$

$$P_i^{t+\Delta t} = P_i^t + (\frac{\Delta t}{\Delta x^2})(\frac{k}{\phi\mu c})(P_{i+1}^t - 2P_i^t + P_{i-1}^t), i = 2,\ldots,N-1 \tag{12}$$

$$P_N^{t+\Delta t} = P_N^t + (\frac{\Delta t}{\Delta x^2})(\frac{k}{\phi\mu c})(2P_R^t - 3P_N^t + P_{N-1}) \tag{13}$$

Oppgave

1. Ta utgangspunkt i FORTRAN-programmet fra øving 7, og lag et program som løser ligningen numerisk for trykk i gridblokkene ved hjelp av differanseliningene over.
2. Kjør programmet for datasettet nedenfor

$N=10$	$k=1,0\ mD$	$P_0=1\ atm$
$L=100\ cm$	$\mu=1,0\ cP$	$P_R=1\ atm$
$A=10\ cm^3$	$c=0,0001\ atm^{-1}$	$P_L=2\ atm$
$\Delta t=0,0005\ s$		

   Kjør programmet 600 tidsskritt for at trykkene skal begynne å stabilisere seg. Skriv ut bare hvert tiende tidsskritt.
3. Lag et plott av trykk vs. tid i blokk 5 fra både den numeriske og den analytiske løsningen, slik at vi kan sjekke at den numeriske løsningen er riktig.